

**Corps de décomposition - TD 4**

Sauf si c'est précisé autrement, tous les polynômes sont considérés dans  $\mathbb{Q}[x]$ .

1. Décrire le corps de décomposition du polynôme  $(x^2 - 5)(x^2 + 1)$ .
2. Montrer que le corps de décomposition  $E$  d'un polynôme de degré 2 dans  $\mathbb{Q}[x]$  est une extension simple de  $\mathbb{Q}$ . Déterminer  $[E : \mathbb{Q}]$ .
3. Décrire le corps de décomposition du polynôme  $x^4 - 2$ .
4. Décrire le corps de décomposition du polynôme  $x^3 - 1$ .
5. Décrire le corps de décomposition du polynôme  $f_m(x) = x^3 - m$ , pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ .
6. Soit  $E$  le corps de décomposition d'un polynôme  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  de degré 3. Si  $[E : \mathbb{Q}] = 3$ , montrer que toutes les racines du polynôme sont dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
7. Montrer que  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  est irréductible si et seulement si  $f(x+1) \in \mathbb{Q}[x]$  est irréductible. Utiliser ce critère afin de décrire le corps de décomposition du polynôme  $x^4 - 2x^2 - 5$ .
8. Décrire le corps de décomposition du polynôme  $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ .